Université Libanaise **ISAE - Cnam Liban** **Centre du Liban associé au Cnam Paris**	**Date :** *Septembre 2013* **Durée :** *3H* **De** *11H* **à** *14H*	**Semestre :** *2ième* **Année :** *2013*
Code UE : *MVA 006* **Intitule de l'UE :** ***Applications de l'analyse à la géométrie, initiation à l'algèbre linéaire.***		**Ce sujet comporte :** *2 pages*

Type d'examen :	**Semestriel**	☐ Partiel	☐ Final	☒ Rattrapage	
	Annuel	€ E1	€ E'1	€ E2	€ E'2

Documents autorisés : € Tous ☒ Aucun € Autre (A préciser : ………………………………………)

Consignes particulières : *Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en considération. La rigueur et la clarté de votre rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie. Les exercices pourront être traités dans l'ordre de votre choix.*

Calculatrice: € Aucune € Programmable ☒ Non programmable

Centres concernés	☒ **Beyrouth**	☒ **Baakline**	☒ **Baalbeck**	☒ **Nahr Ibrahim**
	☒ **Bickfaya**	☒ **Ghazza**	☒ **Tripoli**	

Exercice 1: (4 points)

Soit la fonction f de deux variables réelles définie par : $f(x,y)=\ln(2+2x+x^2+y^2)$.

1-Expliquer pourquoi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

2-Donner le développement de Taylor-Young à l'ordre 2 de f au voisinage de $(-1,0)$.

3-Déterminer une équation cartésienne du plan (P) tangent à la surface (S) représentative de f au point $(-1,0,0)$, et préciser la position relative de (S) par rapport à (P) au voisinage de (0,0)

4-Etudier les extrémums locaux de f.

Exercice 2: (3,5 pts)

Soit (C) la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t)=t-2+\dfrac{1}{t-1} \\ y(t)=1-\dfrac{1}{t-1} \end{cases}$ où le paramètre t varie dans $\mathbb{R}-\{1\}$

1-Etudier les branches infinies de (C).

2-Dresser le tableau de variations des fonctions $t\mapsto x(t)$ et $t\mapsto y(t)$ sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

3-La courbe (C) admet-elle des points de rebroussement? Des points d'inflexion ?

4-Etudier l'intersection de (C) avec les axes de coordonnées et dessiner la courbe (C).

Exercice 3: (1,5 points)

Calculer l'aire de la région D définie par $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1\le\dfrac{x^2}{y}\le 4\ ,\ 1\le\dfrac{y^2}{x}\le 2\ \}$.

Indication *: on pourra utiliser le changement de variables suivant :* $u=\dfrac{x^2}{y},\ v=\dfrac{y^2}{x}$

Exercice 4: (2,5 points)

Le but de cet exercice est de calculer l'intégrale $I=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, définie comme étant $I=\lim\limits_{a\to+\infty} I_a$ où $I_a=\int_0^a e^{-x^2}\,dx$ avec $a>0$.

Pour tout $a>0$, on considère alors les régions suivantes :

$D_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$,

$D_{2a}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$ et $C_a=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le a,\ 0\le y\le a\}$.

Considérons également les intégrales suivantes :

$$J_a=\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \quad , \quad J_{2a}=\iint_{D_{2a}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy \quad \text{et} \quad K_a=\iint_{C_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

1-Calculer J_a et J_{2a} en passant aux coordonnées polaires.

2-Quelle est la limite lorsque $a\longrightarrow+\infty$ de J_a et de J_{2a} ?

3-En dessinant D_a, C_a et D_{2a}, justifier que $J_a\le K_a\le J_{2a}$. Déduire la limite de K_a quand $a\longrightarrow+\infty$.

4-Montrer que $K_a=I_a^2$. En déduire alors la valeur de I.

Exercice 5: (3 points)

Considérons l'intégrale curviligne suivante : $I=\oint_\Gamma (y^2-2x)dx+(1-2xy)dy$, Γ étant la ligne brisée $\Gamma=OABO$ où $O(0,0)$, $A(2,0)$ et $B(2,2)$.

1-Calculer I directement en utilisant une paramétrisation du chemin $\Gamma=OABO$

2-Retrouver la valeur de I en utilisant le théorème de Green-Riemann.

3-Soit D le domaine intérieur du plan Oxy limité par le chemin Γ. On suppose que D est une plaque pesante de masse surfacique $f(x,y)=y$.
Calculer la masse de D et les coordonnées de son centre de gravité G.

Exercice 6: (2 points)

En utilisant les coordonnées sphériques, calculer le volume du solide homogène (S) occupant le domaine Ω de l'espace défini par : $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ 0\le z\le 1,\quad x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

Exercice 7: (3,5 points)

Considérons les matrices carrées suivantes: $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-2&0&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

1-Calculer A^2. En déduire que A est inversible, puis déterminer A^{-1}.

2-Calculer A^3, A^4 , A^{10} et A^{2013} .

3-Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire suivant: $\begin{cases}x-y-z=1\\-2x-2z=1\\-x-y+z=0\end{cases}$

4-Déterminer dans chaque cas, toutes les matrices X (si elles existent) qui vérifient la relation donnée:

a) $AX=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$ b) $AXA=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$